Практическое занятие №6.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Нахождение производных функций. Приложения производной.**

1. Найти производные следующих функций:

a) $y = 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + \dfrac{7}{x^5} + 4$; b) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ c) $y = \dfrac{x^4+1}{x^4-1}$; d) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$

e) $y = \dfrac{\sin^2 x}{x^3+1}$ f) $y = \sqrt{\dfrac{\cos^2 x + 1}{\sin 2x + 1}}$ g) $y=\left(x^5+3x-1\right)^4$; h) $y = \sqrt[3]{x^4 + \sin^4 x}$

k) $y = \left(2^{x^4} - tg^4 x\right)^3$ m) $y = e^{arctg\sqrt{1+x^2}}$ n) $y = 3^{tg^3 5x}$ o) $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$

q) $y = \dfrac{1}{(1-x^2)^5}$ r) $y = \ln(x^2+2x)$ s) $y = \cos\ln(1-x^2)$ t) $y = \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

u) $y = \sqrt[5]{x + x\sqrt[3]{x}}$ v) $y = e^x tg 4x$; w) $y = x^2\cos x$ z) $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x$

2. Используя логарифмическую производную найти производные следующих функций:

a) $y = (\sin x)^x$ b) $y = x^{x^2}$ c) $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ d) $y = \left(\sin 3x\right)^{\cos 5x}$ e) $y = \left(x^3+1\right)^{tg 2x}$.

3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

4. Найти производную второго порядка y'' для функций

a) $y = \left(1+4x^2\right)arctg 2x$ b) $y = (x^2+1)\ln(1+x^2)$

5. Найти значения производных любого порядка функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точке $x = 2$.

6. Удовлетворяет ли функция $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ при любых постоянных C_1 и C_2 уравнению

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи из Лекции №6 (ФИТ)

Пример 1. Для функции определить левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$, если $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Пример 2. Найти значение производной функции $y = |x|$ в точке x=0.

Пример 3. Найти производную функции $y = \left(\sin 2x\right)^{x^3}$.

Пример 4. Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определить: 1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$; и сравнить их, если:

а) $\Delta x = 1$, б) $\Delta x = 0{,}1$, в) $\Delta x = 0{,}01$

Пример 5. Найти производную функции $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3$

Пример 6. Найти производную функции $y = \sqrt{\sin(\ln x)}$

Пример 7. Найдем производную третьего порядка функции $y = 3x^3 + 1$.

Пример 8. Найдем производную сотого порядка функции $y = x\cos x$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Примеры:

Пользуясь определением, найти производную функции $y = f(x)$:

1) $y = 3x^2$;

2) $y = \sin x$.

1) Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда соответствующее приращение Δy функции будет иметь вид

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 =$$
$$= 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) = 3\Delta x(2x + \Delta x).$$

Отсюда находим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке x при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 3 \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 3 \cdot 2x = 6x.$$

Таким образом, $y' = (3x^2)' = 6x$.

2) Найдем приращение Δy функции, соответствующее приращению Δx аргумента, используя формулу разности синусов:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом и непрерывностью $\cos x$. Таким образом, $y' = (\sin x)' = \cos x$.

Примеры:

Пользуясь основными правилами дифференцирования, найти $f'(x)$, если:

1) $f(x) = \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} - 5^{x+1}$;

2) $f(x) = (x^4 - x) \cdot (3\operatorname{tg} x - 1)$.

1) Преобразуем функцию к виду

$$f(x) = 9 \cdot x^{-2/3} - 5 \cdot 5^x.$$

Отсюда, используя таблицу производных, получим

$$f'(x) = (9 \cdot x^{-2/3} - 5 \cdot 5^x)' = (9 \cdot x^{-2/3})' - (5 \cdot 5^x)' =$$
$$= 9 \cdot (x^{-2/3})' - 5 \cdot (5^x)' = 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} - 5 \cdot 5^x \ln 5 =$$
$$= -6x^{-5/3} - 5^{x+1} \ln 5.$$

2) Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$f'(x) = \left[(x^4 - x)(3\operatorname{tg} x - 1)\right]' =$$
$$= (x^4 - x)'(3\operatorname{tg} x - 1) + (x^4 - x)(3\operatorname{tg} x - 1)' =$$
$$= (4x^3 - 1)(3\operatorname{tg} x - 1) + (x^4 - x) \cdot \frac{3}{\cos^2 x}.$$ ●

Примеры:

5. Вычислить производную функции:

а) $y = \dfrac{x^2 \sin x}{\ln x}$ $(x > 0,\ x \neq 1)$; б) $y = \cos(2^x - x^3)$ $(-\infty < x < \infty)$.

△ а) Пользуясь правилами дифференцирования произведения и частного и таблицей производных, получаем

$$y'(x) = \frac{(x^2 \sin x)' \ln x - x^2 \sin x (\ln x)'}{\ln^2 x} =$$
$$= \frac{(x^2 \cos x + 2x \sin x) \ln x - x^2 \sin x \cdot 1/x}{\ln^2 x} =$$
$$= \frac{x(x \cos x + 2 \sin x) \ln x - x \sin x}{\ln^2 x} \quad (x > 0,\ x \neq 1).$$

б) Функцию $y = \cos(2^x - x^3)$ можно представить в виде $y = \cos t$, где $t = 2^x - x^3$. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получаем

$$y'(x) = (\cos t)'|_{t=2^x - x^3} (2^x - x^3)' =$$
$$= -\sin(2^x - x^3)(2^x \ln 2 - 3x^2) \quad (-\infty < x < \infty).$$ ▲

Примеры:

Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции y:

1) $y = \sin^2 x$;

2) $y = \ln(\operatorname{arctg} 3x)$.

1) Данная функция является композицией двух имеющих производные функций $u = \sin x$ и $f(u) = u^2$. Так как $u' = \cos x$, а $f'(u) = 2u$, то с учетом правила дифференцирования сложной функции получим:

$$y'(x) = (u^2)'_x = 2u \cdot u' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

2) Функция $\ln(\operatorname{arctg} 3x)$ — композиция функций $u = \operatorname{arctg} 3x$ и $f(u) = \ln u$, откуда

$$y'(x) = (\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot (\operatorname{arctg} 3x)'.$$

Функция $\operatorname{arctg} 3x$, в свою очередь, является композицией двух функций $v = 3x$ и $g(v) = \operatorname{arctg} v$, поэтому для нахождения ее производной нам придется еще раз применить правило дифференцирования сложной функции:

$$(\operatorname{arctg} 3x)' = (\operatorname{arctg} v)'_x = \frac{1}{1+v^2} \cdot v' = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}.$$

Отсюда окончательно

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot (\operatorname{arctg} 3x)' = \frac{3}{(1+9x^2)\operatorname{arctg} 3x}.$$

Примеры:

Используя логарифмическую производную, найти производные функций:

1) $y = x^{\sin x}$;

2) $y = \dfrac{(x-1)^3 \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

1) Прологарифмируем обе части равенства $y = x^{\sin x}$. Тогда $\ln y = \ln x^{\sin x}$, т. е. $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. Теперь продифференцируем последнее равенство, при этом в левой части используем производную сложной функции, а в правой — производную произведения: $(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)'$, т. е. $\dfrac{y'}{y} = (\sin x)' \ln x + \sin x (\ln x)'$ или $\dfrac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}$.

Отсюда $y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$ или, учитывая, что $y = x^{\sin x}$,

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

2) Непосредственное дифференцирование данной дроби привело бы к громоздким вычислениям, зато применение логарифмической производной позволяет найти ответ без труда:

$$\ln y = \ln \frac{(x-1)^3 (x+2)^{1/2}}{(x+1)^{2/3}}.$$

Отсюда, используя формулы для логарифма произведения, частного и степени, получим:

$$\ln y = \ln(x-1)^3 + \ln(x+2)^{1/2} - \ln(x+1)^{2/3},$$

т. е.

$$\ln y = 3\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{2}{3}\ln(x+1).$$

Осталось продифференцировать обе части полученного равенства:

$$(\ln y)' = \left[3\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)\right]'$$

или

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)},$$

откуда

$$y' = y \cdot \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)}\right),$$

т. е.

$$y' = \frac{(x-1)^3\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)}\right). \quad \bullet$$

Пример:

Найти производную $y'(x)$ от следующей функции, заданной параметрически:

$$x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t.$$

❍ Производная функции $y(x)$ находится по формуле $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, откуда в нашем случае

$$y'(x) = \frac{(3\sin t)'}{(2\cos t)'} = -\frac{3\cos t}{2\sin t} = -1{,}5\operatorname{ctg} t. \quad \bullet$$

Примеры:

Найти производные f' функций $f : x \mapsto y$, заданных уравнениями:

53. $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$.

◀ Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемое решение данного уравнения. Тогда

$$x^2 + 2xf(x) - (f(x))^2 \equiv 4x \qquad (1)$$

на некотором интервале. Поскольку все члены в тождестве (1) дифференцируемы, то из (1) после дифференцирования получаем

$$2x + 2f(x) + 2xf'(x) - 2f(x)f'(x) \equiv 4,$$

откуда

$$f'(x) = \frac{f(x) + x - 2}{f(x) - x}, \qquad f(x) \neq x. \ ▶$$

54. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$.

◀ Подставив в данное уравнение дифференцируемое решение $y=f(x)$, получим тождество

$$x^{\frac{2}{3}}+(f(x))^{\frac{2}{3}}\equiv 1,$$

дифференцируя которое, имеем

$$x^{-\frac{1}{3}}+(f(x))^{-\frac{1}{3}}f'(x)\equiv 0.$$

Отсюда находим

$$f'(x)=-\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{3}},\qquad x\neq 0. \ ▶$$

Пример:

Найти производную неявно заданной функции y:

$$x^3+y^3=\sin(x-2y).$$

◐ Дифференцируя обе части уравнения и учитывая, что y — есть функция от x (поэтому, например, $(y^3)'_x=3y^2\cdot y'$), получим:

$$3x^2+3y^2\cdot y'=\cos(x-2y)(1-2y')$$

или

$$3x^2+3y^2\cdot y'=\cos(x-2y)-2y'\cdot\cos(x-2y).$$

Отсюда находим y':

$$3y^2y'+2y'\cdot\cos(x-2y)=\cos(x-2y)-3x^2$$

или

$$y'(3y^2+2\cos(x-2y))=\cos(x-2y)-3x^2,$$

т. е.

$$y'=\frac{\cos(x-2y)-3x^2}{3y^2+2\cos(x-2y)}. \quad ●$$

Пример:

3. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\cos x$ в точке с абсциссой $x=\pi/6$.

△ Имеем $x_0=\pi/6$, $f(x_0)=\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$, $f'(x_0)=-\sin(\pi/6)=$ $=-1/2$. Поэтому искомое уравнение касательной запишется в виде

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right). \ ▲$$

Пример:

Найти дифференциал функции

$$y=e^{x^3}.$$

◐ Так как $dy=y'dx$, то в данном случае $dy=\left(e^{x^3}\right)'dx=$ $=3x^2\cdot e^{x^3}dx$. ●

Пример:

Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$.

Сначала найдем приращение Δy в общем виде:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \\ = \left[(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1\right] - (x^2 - 3x + 1) = \\ = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 = \\ = 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Из полученного выражения для приращения Δy видно, что его линейная часть в произвольной точке x_0 равна $(2x_0 - 3)\Delta x$. Тогда по определению дифференциал данной функции будет равен $dy = (2x - 3)\Delta x$, или, в более привычной записи, $dy = (2x - 3)dx$.

Второе слагаемое в полученной записи для Δy, т. е. $(\Delta x)^2$, есть бесконечно малая более высокого порядка, чем первое слагаемое.

Заметим, что можно найти dy и сразу (без вычисления Δy) по формуле $dy = y'dx$, откуда $dy = (x^2 - 3x + 1)'dx = (2x - 3)dx$.

Теперь найдем Δy и dy в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 - 3) \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}11, \quad dy = 0{,}1.$$ ●

Примеры: Задачи на использование приближенной формулы:

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{3}$$

3. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, найти приближенное значение а) $\sqrt{0{,}98}$, б) $\sin 31°$

Δ а) Рассмотрим функцию $y(x) = \sqrt{1 + x}$. Так как $y(0) = 1$, $y(-0{,}02) = \sqrt{0{,}98}$, $y'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2}$, $y'(0) = \frac{1}{2}$, то по формуле (3) получаем

$$y(-0{,}02) \approx y(0) + y'(0)(-0{,}02) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

Итак, $\sqrt{0{,}98} \approx 0{,}99$.

б) Рассмотрим функцию $y = \sin x$ Так как $y(30°) = \sin 30° = 1/2$, $y'(30°) = \cos 30° = \sqrt{3}/2$, $1° = 2\pi/360$ (радиан) $\approx 0{,}0175$ (радиан), то по формуле (3), получаем

$$\sin 31° \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{2\pi}{360} \approx 0{,}5151.$$ ▲

Примеры:

Вычислить приближенно:

1) $\ln 1{,}02$;

2) $\sqrt{24}$.

1) Воспользуемся приближенной формулой

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

Тогда, подставляя $f(x)=\ln x$, получим

$$\ln(x_0+\Delta x)\approx \ln x_0+\frac{1}{x_0}\cdot\Delta x.$$

Полагая здесь $x_0=1$, $\Delta x=0{,}02$, найдем

$$\ln 1{,}02\approx \ln 1+\frac{1}{1}\cdot 0{,}02=0{,}02.$$

Таким образом, $\ln 1{,}02\approx 0{,}02$.

2) Учитывая, что $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=25$, $\Delta x=-1$, получим

$$\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot\Delta x, \quad \text{т. е.}$$

$$\sqrt{24}\approx\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot(-1)=4{,}9.$$

Окончательно $\sqrt{24}\approx 4{,}9$.

Пример:

1. Найти $y^{(10)}$, если $y=x^2e^{3x}$.

△ Данная функция является произведением двух функций: x^2 и e^{3x}. Применяя формулу Лейбница, получаем

$$(x^2e^{3x})^{(10)}=x^2(e^{3x})^{(10)}+C_{10}^1(x^2)'(e^{3x})^{(9)}+ \\ +C_{10}^2(x^2)^{(2)}(e^{3x})^{(8)}+\ldots+(x^2)^{(10)}e^{3x}.$$

Так как $(x^2)^{(n)}=0$ при $n\geqslant 3$, $(e^{3x})^{(k)}=e^{3x}3^k$, то

$$(x^2e^{3x})^{(10)}=x^2e^{3x}3^{10}+10\cdot 2xe^{3x}3^9+45\cdot 2e^{3x}3^8= \\ =3^9e^{3x}(3x^2+20x+30).\ ▲$$

Рассмотренный пример показывает, что формулу Лейбница наиболее удобно применять в тех случаях, когда один из сомножителей является многочленом невысокой степени p. В этом случае все члены формулы Лейбница начиная с $(p+2)$-го равны нулю.

Пример:

68. $y=x\operatorname{sh}x$. Найти $y^{(100)}$.

◀ Применяем формулу Лейбница, положив $u=x$, $v=\operatorname{sh}x$, и получаем

$$y^{(100)}=(x\operatorname{sh}x)^{(100)}=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k(x)^{(k)}(\operatorname{sh}x)^{(100-k)}=C_{100}^0\,x\operatorname{sh}x+C_{100}^1\operatorname{ch}x=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x.\ ▶$$